POLYTECHNIQUE

CONCOURS 1974

OPTION : P'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

E désigne un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ définit l'orientation de l'espace E.

I

La position d'un point M est définie en fonction de la variable réelle t (qu'on appellera le temps) par la condition :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \sin t\,(\cos t - 2)\,\vec{I} - \cos t\,(\cos t - 2)\,\vec{J} - \sin t\,\vec{K}$$

Dessiner les projections de la trajectoire (Γ) de M sur les 3 plans de coordonnées.

Déterminer le plan osculateur à (Γ) et la courbure de (Γ) aux points de paramètre o et de paramètre π.

II

Un solide S assimilé à un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé (0 ; i, j, k) est animé par rapport à E d'un mouvement tel qu'à l'instant t la position du point 0 est définie par

$$\overrightarrow{\Omega O} = a\cos(t+\alpha)\,\vec{I} + a\sin(t+\alpha)\,\vec{J}$$

où a et α sont des constantes réelles : $a \neq 0$, $\alpha \in]-\pi, \pi[$ et les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ s'expriment par les combinaisons linéaires.

$$\vec{i} = \vec{I}\cos t + \vec{J}\sin t$$

$$\vec{j} = \vec{I}\sin^2 t - \vec{J}\sin t\cos t + \vec{K}\cos t$$

$$\vec{k} = \vec{I}\sin t\cos t - \vec{J}\cos^2 t - \vec{K}\sin t$$

1°/ Déterminer le vecteur rotation $\vec{\omega}$ à l'instant t en l'exprimant comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ et comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

2°/ Donner des équations dans E et dans S de l'axe Σ de rotation et glissement du mouvement hélicoïdal tangent à l'instant t .

Déterminer la vitesse, à l'instant t , d'un point H de S qui à cet instant se trouve sur l'axe Σ correspondant.

3°/ Calculer la constante α pour qu'existe à l'instant t un point de S dont la vitesse par rapport à E est nulle à cet instant. Donner dans cette hypothèse une définition géométrique simple des ensembles des positions de Σ dans S et dans E .

4°/ Lorsque α ne vérifie pas la condition trouvée au 3°, démontrer que le mouvement peut être étudié en choisissant dans S un autre repère qui substitue aux constantes a et α des constantes b et $\frac{\pi}{2}$ (on calculera b) .

III

On conserve les notations du II 1°/ et l'on suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans cette partie et dans la suivante.

1°/ Montrer qu'à chaque instant, t, il existe un point P de S dont l'accélération est nulle en cet instant ; calculer les coordonnées de P dans S et dans E ; caractériser géométriquement les ensembles des positions de P dans S et dans E .

2°/ Déterminer l'accélération à l'instant t du point H de S qui se trouve sur l'axe instantané à cet instant. Comparer l'accélération de H et le vecteur $\overrightarrow{PH}$. Comparer les plans osculateurs aux trajectoires des différents points H en ces points ; comparer également les courbures de ces trajectoires.

3°/ Soit P_0 le point de S dont l'accélération est nulle à l'instant 0, déterminer la trajectoire du point P_0 dans E .

IV

Un point Q est animé par rapport à S d'un mouvement défini par :

$$\overrightarrow{OQ} = a\,\vec{i} + \vec{j}\,t\cos t - \vec{k}\,t\sin t$$

On compose le mouvement de Q par rapport à S et celui de S par rapport à E ; déterminer la trajectoire de Q dans E . Calculer directement les vecteurs vitesse et accélération de Q par rapport à E .

2°/ Déterminer les vecteurs qui interviennent dans le théorème sur la composition des vitesses et des accélérations afin de vérifier ce théorème, dans ce cas particulier . Les candidats détermineront les coordonnées des vecteurs en question relativement à la base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ et relativement à la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; pour répondre à cette question ils sont invités à constituer des tableaux conformes aux modèles donnés au dos du texte en indiquant sur chaque ligne la coordonnée correspondante du vecteur titre de la colonne.: $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Tableau des vitesses: absolue, relative, d'entraînement.

Tableau des accélérations: absolue, relative, complémentaire, d'entraînement.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail